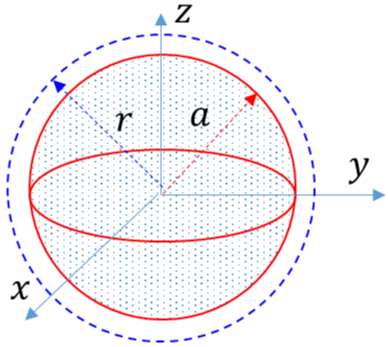
球体电场强度

【关键词】：电场强度；静电学高斯定理；第二类曲面积分；两类曲面积分的联系；三重积分；球坐标

【问题引入】

电场强度是用来表示电场的强弱和方向的物理量。实验表明，在电场中某一点，试探电荷（正电荷）在该点所受电场力与其所带电荷的比值是一个与试探点电荷无关的量。于是以试探点电荷（正电荷）在该点所受电场力的方向为电场方向，以前述比值为大小的矢量定义为该点的电场强度，常用E表示。

假设有一个半径为a的带电球体，电荷按体密度$\rho=\rho_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$分布于球体内，其中$\rho_0$为常数。试计算球外的电场强度。



【理论分析】

计算封闭曲面的电场强度，可使用静电学的高斯定理。高斯定理是静电场的两条基本定理之一，它反映了静电场的基本性质：静电场是有源场，"源"即电荷。此外高斯定理不仅对静电场适用，对变化的电场也适用，它是电磁场理论的基本方程之一。

高斯定理指出：穿过一封闭曲面的电通量与封闭曲面所包围的电荷量成正比：

$$\oiint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{q_i\ in\ V}q_i$$

也可以说是：电场强度E在一封闭曲面∂V上的曲面积分（对坐标的曲面积分）与封闭曲面所包围的电荷量成正比，其中，ε_0为介质的相对介电常数，这是一个无量纲的量。

高斯定理表示，电场强度对任意封闭曲面的通量只取决于该封闭曲面内电荷的代数和，与曲面内电荷的位置分布情况无关，与封闭曲面外的电荷亦无关。在真空的情况下，$\sum_{q_i\ in\ V}q_i$是包围在封闭曲面内的自由电荷的代数和。当存在介质时，$\sum_{q_i\ in\ V}q_i$应理解为包围在封闭曲面内的自由电荷和极化电荷的总和。

由于我们的问题涉及球体内连续分布的电荷，所以高斯定理右端应变为三重积分

$$\oiint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho dV$$

【问题求解】

取半径等于$R,(R>a)$的球面作为闭合面，利用静电学的高斯定理，球外的电场强度E与球体内的电荷满足如下公式

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

公式左边

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

是对坐标的曲面积分，其中∂V是半径为R的球体表面，方向取外侧。由于电荷密度$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$的分布只与$r$有关，所以电场强度$E$的方向为球面的外法线方向，则$\vec{E}, d\vec{S}$方向相同。那么可通过数量积将对坐标的曲面积分转化为对面积的曲面积分

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\partial V} E \cdot dS = E \oiint_{\partial V} dS = E4\pi R^2$$

公式右边

$$\iiint_V \rho dV = \iiint_V \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dV$$

由于积分区域是球体，所以使用球坐标计算三重积分，

$$\iiint_V \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 sin\varphi\, dr = \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3$$

代入高斯定理可得

$$E4\pi R^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3$$

即

$$E = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 R^2}$$